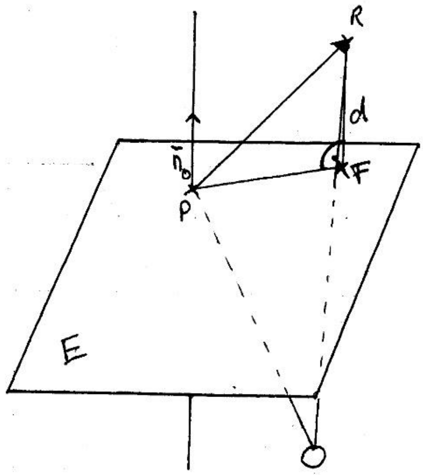
Hesse´sche Normalenform



Verwendung:

Man verwendet die Hesse´sche Normalenform um die kürzeste Verbindung von einem Punkt zu einer Ebene zu berechnen. Dabei ist allerdings der Lotfußpunkt keine notwendige Angabe, da er nicht nötig ist um den Abstand zu berechnen.

Hesse´sche Normalenform:

$$\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\overrightarrow{n_0}=0$$

Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0}$:

Der Term $\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\overrightarrow{n_0}=0$ entspricht der Normalenform der Ebene $E:\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\vec{n}=0$. An der Stelle des Normalenvektors $\vec{n}$ wird der Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0}$ gesetzt. Dieser hat die Länge 1 Längeneinheit und wird aus dem jeweiligen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E berechnet:

$$\overrightarrow{n_0}=\frac{1}{\left|\vec{n}\right|}\cdot\vec{n}=\frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}$$

Um nun den Abstand des Punktes R zur Ebene E zu berechnen, muss man den Vektor $\vec{x}$, siehe $\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\overrightarrow{n_0}=0$, der irgendeinen Punkt auf der Ebene beschreibt, der aber nicht bekannt ist, durch den Vektor $\vec{r}$, der einen Punkt außerhalb der Ebene beschreibt, ersetzen.

Satz 1:

Ist $E:\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\vec{n}=0$ die Hesse´sche Normalenform einer Gleichung der Ebene E, so gilt für den Abstand d eines Punktes R mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ von der Ebene E:

$$d=\left|\left(\vec{r}-\vec{p}\right)\cdot\overrightarrow{n_0}\right|.$$

Hat man nun die Ebene in Koordinatenform angegeben, $E: a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$ so bilden die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 die Koordinaten eines Normalenvektor $\vec{n}$. Nun muss man diesen Normalenvektor normieren, dass heißt auf die Längeneinheit 1 bringen. Dazu wird die Koordinatengleichung durch den Betrag von $\vec{n}$ geteilt. So erhält man die

Koordinatendarstellung der Hesse´schen Normalenform:

$$\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}} = 0$$

Daher gilt für den Abstand d :

Satz 2:

$$d = \left| \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}} \right|$$

Übungsaufgaben:

1.

Errechen für die gegebenen Punkte den Abstand zur Ebene:

$a) A(2|0|2), B(2|1|-8), C(5|5|5)$ $\quad E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$b) A(1|1|-2), B(5|1|0), C(1|3|3)$ $\quad E: 2x_1 - 10x_2 + 11x_3 = 11$

2.

Gegeben sind die Ebene $E: 3x_2 + 4x_3 = 0$ und der Punkt $P(3|-1|7)$.

a) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, die orthogonal zur Ebene E ist und durch den Punkt P geht.
b) Bestimmen Sie den Lotfußpunkt, d.h. den Schnittpunkt Q der Geraden g mit der Ebene E. Berechnen Sie den Abstand der Punkte P und Q.
c) Berechnen Sie den Abstand von P zur Ebene E. Kontrollieren Sie damit Ihr Ergebnis aus b).

Lösungen:

1.

a)Punkt A:

Normaleneinheitsvektor:

$$\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+4} = 9$$

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Hesse´sche Normalenform:

$$\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right)=0 \qquad => d = \left|\left[\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}\right]\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right)\right| = 1$$

Punkt B:

$$d = \left|\left[\begin{pmatrix}2\\1\\-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}\right]\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right)\right| = 1,\overline{2}$$

Punkt C:

$$d = \left|\left[\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}\right]\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right)\right| = 1,\overline{4}$$

b)

Punkt A:

Jetzt wird der 2. Satz angewendet, da die Ebene in Koordinatendarstellung gegeben ist. Der Punkt A wird in die jeweiligen x-Werte eingegeben.

$$d = \left|\frac{2\cdot 1+(-10)\cdot 1+11\cdot(-2)-11}{\sqrt{4+100+121}}\right| = 2{,}73$$

Punkt B:

$$d = \left|\frac{2\cdot 5+(-10)\cdot 1+11\cdot 0-11}{\sqrt{4+100+121}}\right| = 0{,}73$$

Punkt C:

$$d = \left| \frac{2 \cdot 5 + (-10) \cdot 3 + 11 \cdot 3 - 11}{\sqrt{4 + 100 + 121}} \right| = 4{,}26$$

2.

a)

Da die kürzeste Verbindung von einem Punkt zu einer Ebene orthogonal zu der Ebene steht ist sie der Normalenvektor der Ebene und gleichzeitig der Richtungsvektor der

Lotgeraden g, da diese ebenfalls rechtwinklig von der Ebene absteht. Da der x_1-Wert nicht gegeben ist beträgt der x_1 Eintrag des Normalenvektors 0. Die Gerade lautet daher:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)

Um den Schnittpunkt Q der Lotgeraden g mit der Ebene E zu bestimmen muss man die beiden Gleichungen gleichsetzen:

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + r \cdot 0 \\ (-1) + r \cdot 3 \\ 7 + r \cdot 4 \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= (-1) + 3r \\ x_3 &= 7 + 4r \end{aligned}$$

Diese x – Werte werden nun in die Koordinatendarstellung der Ebene eingesetzt:

$$\begin{aligned} &E : 0 \cdot 3 + 3 \cdot ((-1) + 3r) + 4 \cdot (7 + 4r) = 0 \\ &= -3 + 9r + 28 + 16r = 0 \\ &= 25 + 25r = 0 \quad => r = -1 \end{aligned}$$

Nun setzt man den Wert in die Gleichung der Lotgeraden g ein und erhält den Schnittpunkt Q

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix}3+0\\(-1)+(-3)\\7+(-4)\end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix} \quad = \quad Q$$

Nun wird Die Strecke $\overline{PQ}$ berechnet um den Abstand dann mithilfe des Betrages $\left|\overline{PQ}\right|$ zu errechnen:

$$\overline{PQ} \quad = \quad P-Q \quad = \begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| \quad = \quad \left|\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right| \quad = \quad \sqrt{9+16} \quad = \quad \underline{\underline{5}}$$

c)

Berechnung des Abstandes mithilfe der Hesse`schen Normalenform :

Die Ebene ist in Koordinatendarstellung gegeben, daher nutzen wir nun Satz 2:

$$d=\left|\frac{0\cdot 3+3\cdot(-1)+4\cdot 7-0}{\sqrt{9+16}}\right| \quad = \quad \left|\frac{(-3)+28}{5}\right| \quad = \quad \underline{\underline{5}}$$